Feuille d'exercices n° 1

Matrices et systèmes linéaires

Exercice 1.
Calculer les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.
On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer les matrices suivantes, lorsqu'elles sont bien définies : ${}^tA$, ${}^tB$, $A + B$, $A + {}^tA$, $B + {}^tB$, AB, BA, A^2, $A\,{}^tA$, $({}^tA)A$, $({}^tA)^2$, $({}^tB)B$, $B\,{}^tB$, $({}^tB)^2$, ${}^tA\,{}^tB$ et ${}^tB\,{}^tA$.

Exercice 3.
Soit a et b deux réels. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}.$$

1) On suppose dans cette question que $a = \pi$ et $b = \pi/2$.
a) Calculer les coefficients de A et B.
b) On définit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer AX et AY puis BX et BY. On pourra représenter ces 6 vecteurs sur un dessin.
On suppose de nouveau que a et b sont quelconques.
2) Calculer AB et BA. En déduire que A et B commutent, c-à-d $AB = BA$.
3) Montrer que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 4.
(*) Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que $A^2 + A = 2I_2$.
2) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.
3) Ecrire la matrice A^{-1}.

Exercice 5.
(*) Transformer les matrices suivantes en matrices échelonnées réduites :

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&-2\\2&-1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-5&12&-7\\0&11&17\\0&0&93\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}0&2&-2&5&0&3\\-1&3&0&4&1&2\\0&1&-2&2&1&1\\0&-1&2&-4&-1&-3\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}0&2&-1&3\\1&0&1&-2\\-1&2&1&5\\2&-1&0&0\\1&2&-2&-1\end{pmatrix},E=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-m&1&m\\1&-m&-1\\m&1&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 6.
(*) Déterminer le rang et le noyau des matrices de l'exercice précédent.

Exercice 7.
(*) Résoudre les systèmes linéaires suivants en utilisant la méthode de Gauss :

$$1)\left\{\begin{array}{l}x+y+z=1\\x+y+3z=2\end{array}\right.,2)\left\{\begin{array}{l}x-2y+2z=1\\2x-y-2z=-1\\2x-2y+z=1\end{array}\right.,$$

$$3)\left\{\begin{array}{l}x+2y-z=1\\2x+y+2z=2\\x-4y+7z=3\end{array}\right.,4)\left\{\begin{array}{l}x+y+3z+2t=-2\\2x+3y+4z+t=-1\\3x+7y+z-6t=6\end{array}\right..$$

Exercice 8.
(*) Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&0&1\\2&1&-1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 9.
(**) On considère la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

et on pose $B=A-I_3$.
1) Montrer par récurrence la formule du binôme de Newton : si M et N sont des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $MN=NM$ alors

$$(N+M)^k=\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}N^lM^{k-l}.$$

2) Calculer B^k pour tout entier $k\geq 1$.
3) Calculer A^{100}.

Feuille d'exercices n° 2

Espaces vectoriels

Exercice 10.
Représenter graphiquement les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ suivants et déterminer s'ils sont des s.e.v.
1) $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 3y\}$,
2) $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = x^2\}$,
3) $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = x^2, y = 0\}$,
4) $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = y\}$,
5) $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = y, z = 0\}$.

Exercice 11.
Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants sont-ils des s.e.v ?
1) $E_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x = 3t\}$,
2) $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, y \neq z\}$,
3) $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x = 1\}$.

Exercice 12.
(*) Soit $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x - y = 0\}$ et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = 0\}$. Montrer que $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2$.

Exercice 13.
(*) Pour chacune des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivantes, déterminer si elle est libre.
1) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
2) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 14.
(*) On considère les s.e.v

$$E_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x = 3t\} \text{ et } E_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, t = 0, z = 3x - 7y\}.$$

1) Déterminer pour E_1 une famille libre et génératrice. Même chose pour E_4.
2) Déterminer $E_1 \cap E_4$ et $E_1 + E_4$.

Exercice 15.
(*) Considérons les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y - 2t = 0, x + t = 0\},$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - z + t = 0, y + z = 0\}.$$

1) Trouver une base de F et G.
2) Les s.e.v F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 16.
(*) On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

2) Soit a, b, c et d des nombres réels. Calculer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$ dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4).
3) Calculer les coordonnées, dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4), de chacun des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 17.
(**) Soit F et G deux s.e.v d'un e.v E.
1) Montrer que $F \cap G$ est un s.e.v.
2) Montrer que $F \cup G$ est un s.e.v si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
3) Montrer que si $F \cup G = E$ alors $F = E$ ou $G = E$.

Exercice 18.
(**) Soit $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'e.v des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les sous-ensembles suivants sont-ils des s.e.v de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
1) $E_1 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$,
2) $E_2 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$,
3) $E_3 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est dérivable}\}$.

Exercice 19.
(**) Soit $\mathscr{P} \subset \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathscr{I} \subset \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions impaires.
1) Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont des s.e.v de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2) Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont supplémentaires dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 20.
(**) Soit E un e.v et F un s.e.v de E. Montrer que F est engendré par deux vecteurs u et v si et seulement si il est engendré par $u - v$ et $u + v$.

Exercice 21.
(**) Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des nombres réels distincts. Montrer que la famille de fonctions $(e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_k x})$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Indication* : Une manière de faire serait de faire tendre x vers l'infini dans une combinaison linéaire qui s'annulerait. Une autre serait de dériver cette combinaison linéaire.

Exercice 22.
(**) Soit $d \geq 1$ un entier et $\mathbb{R}_d[X]$ l'e.v des polynômes de degré inférieur ou égal à d.
1) Donner une base de $\mathbb{R}_d[X]$ et en déduire sa dimension.
2) Soit $P_0, \dots, P_d$ des polynômes tels que $\deg(P_i) = i$. Montrer qu'ils forment une base de $\mathbb{R}_d[X]$.
3) Soit F l'ensemble des polynômes de degré $\leq d$ et s'annulant en 0 et 1. Montrer que F est un s.e.v de $\mathbb{R}_d[X]$ et calculer sa dimension.

Exercice 23.
(**) Soit $n \geq 1$ un entier. Soit $\mathcal{T}_n^+$, $\mathcal{T}_n^-$, $\mathcal{D}_n$, $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ respectivement l'ensembles des matrices triangulaires supérieures, triangulaires inférieures, diagonals, symétriques et antisymétriques de taille $n \times n$.
1) Montrer que $\mathcal{T}_n^+$ est un s.e.v de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2) Calculer la somme et l'intersection de a) $\mathcal{T}_n^+$ et $\mathcal{T}_n^-$ b) $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$.
3) Ces sommes sont elles directes ?

Feuille d'exercices n° 3

Applications linéaires

Exercice 24.
(*) On considère l'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$.
1) Montrer que f est une application linéaire.
2) Déterminer les équations et une base de son image.
3) Même question pour son noyau.
4) Représenter graphiquement le noyau et l'image de f.
5) Représenter sur le même graphique les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ainsi que leur image par f.
6) Interpréter géométriquement l'application f.

Exercice 25.
(*) Pour les applications linéaires suivantes, déterminer le noyau et l'image.
1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-y \end{pmatrix}$.
2) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-7z \\ x+y+z \end{pmatrix}$.
3) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x-y \\ x+y \\ 2x \end{pmatrix}$.

Exercice 26.
(*) Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-2y+z \\ x+z \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que f est une application linéaire.
2) Donner la matrice A correspondant à f.
3) Calculer $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en utilisant la définition de f et aussi à l'aide d'un calcul matriciel.
4) Déterminer une base de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
5) Calculer A^2 et en déduire la forme de $f^2 = f \circ f$.

Exercice 27.
(**) Soit f et g deux applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g (i.e. $g(\ker(f)) \subset \ker(f)$ et $g(\mathrm{Im}(f)) \subset \mathrm{Im}(f)$).

Exercice 28.
(**) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire telle que $f^n = 0$ mais $f^{n-1} \neq 0$ (ici la puissance est à prendre au sens de la composée, $f^n = f \circ \cdots \circ f$). Montrer que si $f^{n-1}(x) \neq 0$ alors la famille $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 29.
(**) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Montrer que $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $f^2 = 0$ et $n = 2\,\mathrm{rg}(f)$.

Exercice 30.
(**) Soit $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. On suppose que p est un *projecteur*, c'est-à-dire $p \circ p = p$.
1) Calculer $(-p) \circ (-p)$ et en déduire que $-p$ est aussi un projecteur.
2) Calculer $p \circ (-p)$ et $(-p) \circ p$ et en déduire que $\ker(p) = \mathrm{Im}(-p)$ et $\mathrm{Im}(p) = \ker(-p)$.
3) Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p)$.
4) Expliciter les restrictions de p à $\mathrm{Im}(p)$ et $\ker(p)$.
5) On suppose que $\mathbb{R}^n = F \oplus G$ et si $x \in \mathbb{R}^n$ on écrit $x = u + v$ l'unique décomposition de x avec $u \in F$ et $v \in G$. Montrer que l'application définie par $p(x) = u$ est un projecteur. On l'appelle la projection sur F parallèlement à G.
6) Trouver l'expression de p quand $n = 2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$.

Exercice 31.
(**) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y + z \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$.
1) Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
2) Calculer $f^2 = f \circ f$ puis $\ker(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2)$.
3) Montrer que f est *nilpotente*, c'est-à-dire qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0$.

Applications linéaires (deuxième partie)

Exercice 32.
(*) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné, dans la base canonique, par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ et en déduire la matrice B de f dans la base $\mathscr{B}$.
3) Ecrire la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathscr{B}$.
4) Calculer P^{-1}.
5) Ecrire B en fonction de A et P.
6) Calculer B^4 puis A^4.

Exercice 33.
(*) On considère l'endormorphisme de $\mathbb{R}^3$ définit par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -14x + 6y - 4z \\ -16x + 8y - 6z \end{pmatrix}.$$

On note $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et

$$\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Rappelons que $C_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ est la matrice de passage de la base $\mathscr{C}$ à la base $\mathscr{B}$ et que $M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est la matrice de f dans les bases $\mathscr{C}$ (au départ) et $\mathscr{B}$ (à l'arrivée). Calculer, pas forcement dans l'ordre proposé, $C_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$, $C_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$, $C_{\mathscr{C},\mathscr{B}}$, $M_{\mathscr{C},\mathscr{C}}(f)$ et $M_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$.

Exercice 34.
(*) Reprendre les questions de l'Exercice 1 avec

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -3 \\ -4 & 9 & -3 \\ -6 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$

et $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 35.
(*) Soit $\mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions infiniment dérivables de l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'application φ définie par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}) &\to \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \quad f' \end{aligned}$$

où f' désigne la dérivée de f.
1) Montrer que φ est une application linéaire.
2) Déterminer son noyau et son image.

Exercice 36.
(**) Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On définit f de E dans lui même par

$$f(P) = P + (1-X)P',$$

où P' désigne la dérivée de P.
1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
2) Soit $\mathscr{B}$, la base de E formée des polynômes $(1, X, X^2, X^3)$. Donner la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
3) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4) Déterminer une base de $\ker(f)$.
5) Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont deux s.e.v supplémentaires de E.

Exercice 37.
(**) Rappelons qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$. Dans le cours, on a utilisé qu'il suffit d'avoir un inverse à gauche, c.à.d une matrice B telle que $BA = I_n$, pour que A soit inversible, d'inverse B. Montrons ce résultat.
Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $BA = I_n$. Considérons l'endomorphisme f de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\begin{aligned} f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) &\to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto \quad AM \end{aligned}$$

1) Montrer que f est injective.
2) En déduire que f est surjective.
3) En déduire qu'il existe une matrice M telle que $AM = I_n$ puis que $M = B$.

Feuille d'exercices n° 5

Determinant, valeurs propres,vecteurs propres.

Exercice 38.
Calculer les déterminants suivants.

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix},\ 2)\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix},\ 3)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix},\ 4)\ \begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 39.
(*) Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de a, si la matrice

$$B_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

est inversible et quand c'est le cas, calculer son inverse.

Exercice 40.
(*) Calculer, en fonction de $a, b, c \in R$ les déterminants suivants.

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix},\ 2)\ \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix},\ 3)\ \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix},\ 4)\ \begin{vmatrix} 1 & \cos^2(a) & \sin^2(a) \\ 1 & \cos^2(b) & \sin^2(b) \\ 1 & \cos^2(c) & \sin^2(c) \end{vmatrix}.$$

Exercice 41.
(**) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. La trace de A est définie par $(A) = a + d$.
1) Vérifier l'équation suivante (théorème de Cayley-Hamilton en dimension deux.) :

$$A^2 - (A)A + \det(A)I_2 = 0.$$

2) Posons $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Montrer que $A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A)I_2$.
3) Retrouver à partir de là le résultat de cours : A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}.$$

4) Montrer que, si $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ alors $A^2 = 0$ si et seulement si $(A) = 0$ et $\det(A) = 0$.
5) Montrer que si $A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ alors

$$(AB) = (BA).$$

Exercice 42.
Pour les matrices suivantes, déterminer les valeurs propres puis une base de chaque espace propre associé.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 43.
Pour les matrices suivantes, déterminer les valeurs propres puis une base de chaque espace propre associé.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -7 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$