

Géométrie élémentaire dans le plan et dans l'espace

Dans cette feuille le plan \mathbb{R}^2 , respectivement l'espace \mathbb{R}^3 , sont munis du repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , respectivement $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice 1 1. Soient $A(1; 1)$, $B(3; 2)$ et $C(2; 4)$ des points du plan. Calculer la surface du parallélogramme construit à partir des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} .

2. Soient les points $A(1; 1; 1)$, $B(0; 1; 1)$ et $C(1; 0; 1)$. Calculer le volume du parallélépipède construit à partir des vecteurs \vec{OA} , \vec{OB} et \vec{OC} .

Exercice 2 Soient $A(1; 0)$ et $B(-1; 0)$. Déterminer l'ensemble des points M tels que \vec{MA} et \vec{MB} soient orthogonaux.

Exercice 3 Soient $[OABC]$, un carré du plan. Soit $[OPQR]$ un autre carré du plan contigu au premier et tel que les points O , C et P soient alignés. Soit M le point d'intersection de la droite (PA) et de la droite (BQ) . Montrer que les points R , M et C sont alignés. (On peut choisir $A = (1, 0)$ et établir les différentes équations de droite mais on fera auparavant un dessin.)

Exercice 4 Soient $A(1; 1; 1)$, $B(2; 1; 0)$ et $C(2; 2; 1)$, trois points de l'espace.

1. Vérifier que ces 3 points ne sont pas alignés.
2. Calculer l'aire du triangle (ABC) . En déduire la valeur absolue du sinus de l'angle \widehat{ABC} .
3. Donner un vecteur de norme 1 orthogonal au plan défini par les points A , B et C .

Exercice 5 Soit les vecteurs $\vec{a} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{b} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\vec{c} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$, $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} z \\ z' \\ z'' \end{pmatrix}$.

Montrer que

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

Que peut-on en déduire?

Exercice 6 Calculer les déterminants suivants

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, b = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}, c = \begin{vmatrix} m & 3 & m \\ m-1 & 2 & -3 \\ 1 & m-2 & -(m+1) \end{vmatrix}$$

On précisera quand le dernier déterminant est nul.

Exercice 7 Soient $A(1; 1)$, $B(3; 2)$, $C(2; 4)$ et $D(4; 5)$ des points du plan.

1. Déterminer une équation paramétrique et une équation cartésienne de la droite (AB) .
2. Déterminer une équation paramétrique et une équation cartésienne de la droite (CD) .
3. Déterminer la distance de la droite (AB) à la droite (CD) .

Exercice 8 Soient $A(1; 0; 1)$, $B(1; 1; 0)$, $C(1; 1; -1)$ et $D(2; 1; 0)$ des points de l'espace.

1. Déterminer une équation paramétrique et une équation cartésienne de la droite (OA) .
2. Déterminer une équation paramétrique et une équation cartésienne du plan (BCD) .
3. Déterminer la distance de la droite (OA) au plan (BCD) .

Exercice 9 Soit P le plan d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + s \\ z = 2t - s \end{cases} \text{ avec } (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Vérifier que O et le point A de coordonnées $(3, 5, 1)$ appartiennent à P .
2. Déterminer une équation cartésienne de P et donner un vecteur normal au plan P .
3. Déterminer une équation paramétrique de la droite passant par A et perpendiculaire au plan P .

Exercice 10 Résoudre les systèmes suivants

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ 2x + y - 3z = -4 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 2y + z = 2 \\ 5x + y + z = 5 \end{cases}$$

Espaces vectoriels

Exercice 11 Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}; & E'_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xy = 0\}. \\ E_2 &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = 0, y = z\}; & E'_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 1\}. \\ E_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy \geq 0\}; & E'_3 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ est croissante}\}. \\ E_4 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(1) = 0\}; & E'_4 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(0) = 1\}. \end{aligned}$$

Exercice 12 Réunion de sous-espaces vectoriels.

1. Redonner le résultat du cours sur la réunion de 2 sous-espaces vectoriels.

- Donner un exemple de 2 sous-espaces vectoriels du plan tel que leur réunion n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 13 Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} et soit $F = \{f \in E / f' = 0\}$.

- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E . Montrer qu'il existe $f_0 \in F$ tel que $F = Vect(f_0)$.
- Soit $G = \{f \in E / f(0) = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel et que F et G sont supplémentaires dans E .

Exercice 14 Soient dans \mathbb{R}^4 les vecteurs $\vec{e}_1(1, 2, 3, 4)$ et $\vec{e}_2(1, -2, 3, -4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in Vect\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$? Et pour que $(x, 1, 1, y) \in Vect\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$?

Exercice 15 Les familles suivantes sont-elles libres ?

- $\vec{v}_1(1, 0, 1)$, $\vec{v}_2(0, 2, 2)$ et $\vec{v}_3(3, 7, 1)$ dans \mathbb{R}^3 .
- $\vec{v}_1(1, 2, 1, 2, 1)$, $\vec{v}_2(2, 1, 2, 1, 2)$, $\vec{v}_3(1, 0, 1, 1, 0)$ et $\vec{v}_4(0, 1, 0, 0, 1)$ dans \mathbb{R}^5 .

Exercice 16 Soient dans \mathbb{R}^3 les vecteurs $\vec{v}_1(1, 1, 0)$, $\vec{v}_2(4, 1, 4)$ et $\vec{v}_3(2, -1, 4)$. Montrer que ces vecteurs ne sont pas colinéaires deux à deux et que la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ n'est pas libre.

Exercice 17 On considère dans \mathbb{R}^n une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$. Les familles suivantes sont-elles libres ?

- $\{\vec{e}_1, 2\vec{e}_2, \vec{e}_3\}$
- $\{\vec{e}_1, \vec{e}_3\}$
- $\{\vec{e}_1, 2\vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_4\}$
- $\{3\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_3\}$
- $\{2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2, \vec{e}_4, \vec{e}_2 - \vec{e}_1\}$

Exercice 18 On considère les vecteurs suivants de \mathbb{R}^4 :

$$u_1 = (1, -2, 1, 2), u_2 = (1, -3, 1, 2), u_3 = (2, -4, 3, 4), u_4 = (1, -1, 2, 3).$$

- Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de \mathbb{R}^4 .
- Soient a, b, c, d des nombres réels. Calculer les coordonnées du vecteur (a, b, c, d) dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4) .
- Calculer les coordonnées, dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4) , de chacun des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^4 .

Exercice 19 Dans \mathbb{R}^4 on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 ? Si oui, en donner une base.

Exercice 20 Considérons les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y - 2t = 0 \text{ et } x + t = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - z + t = 0 \text{ et } y + z = 0\}$$

- Trouver une base de F et de G .
- Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires?

Exercice 21 Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par $u_1 = (1, 2, 3, 1)$, $u_2 = (1, 1, 2, 0)$ et $u_3 = (2, 2, 1, 3)$. Donner une base de F .

Exercice 22 Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 1, 2, 1)$ et $u_2 = (2, 1, 3, 4)$. Donner un système d'équations de F .

Exercice 23 Soient E et F les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 engendrés respectivement par les vecteurs $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ et $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$. Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 24 On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$, $v_5 = (0, 1, 0, 1)$ dans \mathbb{R}^4 .

1. $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?
2. Même question pour $\text{Vect}\{v_1, v_3, v_4\}$ et $\text{Vect}\{v_2, v_5\}$.

Exercice 25 Dans \mathbb{R}^4 , on considère le sous-espace vectoriel F engendré par $\{a, b, c\}$ et le sous-espace vectoriel G engendré par $\{d, e\}$ où :

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer des bases des sous-espaces vectoriels F , G , $F + G$, $F \cap G$.

Applications linéaires

Exercice 26 Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? Parmi celles qui sont linéaires, dire si elles sont injectives en trouvant le noyau et donner une base de l'image.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto ax + b$	$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto x^2$
$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $(x, y) \mapsto (2x + 3y, x - y, 2y)$	$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $(x, y) \mapsto (x + 2y, -2x - 4y)$
$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $(x, y, z) \mapsto (-x + y + z, x - y - z, 3x + y + z)$	$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $(x, y, z) \mapsto (xy, x + z)$
$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y - z + 1, x - y + z)$	$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $(x, y) \mapsto (x + 2y, y - 3)$

Exercice 27 Soit I un intervalle de \mathbb{R} , soit $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^∞ de I dans \mathbb{R} et soit $\phi : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{C}^\infty$ l'application qui à f associe f' .

1. Montrer que $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .
2. Montrer que ϕ est une application linéaire et donner son noyau.

Exercice 28 Formule de Grassmann.

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E , on définit l'application $f : F_1 \times F_2 \rightarrow E$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f .
3. Supposons E de dimension finie. En déduire la dimension de $F_1 + F_2$ en fonction des dimensions de F_1 , F_2 et $F_1 \cap F_2$.

Exercice 29 Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique (e_1, e_2, e_3) . On définit l'endomorphisme f de E par :

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + z \\ x + 2y - z \\ -x + y - 2z \end{pmatrix}.$$

1. On définit $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- a- Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- b- Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
- c- Soit u de coordonnées $(1, -3, 2)$ dans la base \mathcal{B} .
 - (i) Donner les coordonnées de u dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
 - (ii) Donner les coordonnées de $f(u)$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
 - (iii) Donner les coordonnées de $f(u)$ dans \mathcal{B} .

2. Déterminer $\text{Im } f$. Préciser sa dimension ainsi qu'une base.
3. En utilisant le théorème du rang et la question 1-b- déterminer $\text{Ker } f$. Préciser sa dimension ainsi qu'une base.
4. Montrer que $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = \mathbb{R}^3$.

Exercice 30 Soit $E = \mathbb{R}^3$, on définit deux endomorphismes f et g par :

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ -x - 2y + z \\ 2x + 4y - 2z \end{pmatrix}$$

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ 2x - y + 2z \\ 3x + z \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Ker } g$ (équation et base).
2. Quelles sont les dimensions de $\text{Im } f$ et $\text{Im } g$?
3. Donner une base de $\text{Im } f$ et de $\text{Im } g$.
4. Montrer que $\text{Ker } f \oplus \text{Ker } g = \mathbb{R}^3$.

Exercice 31 *Projecteurs et Symétries*

Soit E un espace vectoriel.

1. On appelle *projecteur* une application linéaire p de E dans E telle que $p \circ p = p$.

- (a) Démontrer que si p est un projecteur, $Id - p$ est aussi un projecteur et :
- $\text{Ker } p = \text{Im } (Id - p)$.
 - $\text{Im } p = \text{Ker } (Id - p)$.
- (b) Démontrer que $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$.
Dans le cas où E est de dimension finie, démontrer que $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ en utilisant le théorème du rang.
- (c) Montrer que p représente la projection sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.
2. On appelle *symétrie* une application linéaire s de E dans E telle que $s \circ s = Id$.
- (a) Démontrer que $F = \text{Ker}(Id - s)$ et $G = \text{Ker}(Id + s)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de E .
- (b) Démontrer que s représente la symétrie par rapport à F parallèlement à G .
- (c) Notons p la projection sur F parallèlement à G . Examiner s en fonction de p .

Matrice - Déterminants

Exercice 32 Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^2 définie dans la base canonique par la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que $M^2 = M$.
- Donner une base du noyau et de l'image de f . Montrer qu'ils sont supplémentaires.
- Donner la matrice de f dans une base constituée d'un vecteur de $\text{Ker } f$ et d'un vecteur de $\text{Im } f$.

Exercice 33 Soit h l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 définie par rapport à deux bases (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2) par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

On prend dans \mathbb{R}^3 la nouvelle base :

$$e'_1 = e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_3 + e_1, \quad e'_3 = e_1 + e_2.$$

On choisit pour base de \mathbb{R}^2 les vecteurs :

$$f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$$

Quelle est la matrice B de h dans ces bases ?

Exercice 34 Notons \mathcal{B} la base canonique et \mathcal{B}' la base (e'_1, e'_2, e'_3) dont les coordonnées dans \mathcal{B} sont : $e'_1 = (1, 0, -1)$, $e'_2 = (0, 1, 1)$, $e'_3 = (1, 0, 1)$. Soit x de coordonnées $(1, 1, 1)$ dans \mathcal{B}

et soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans \mathcal{B} .

En utilisant les matrices :

1. Donner les coordonnées de $f(x)$ dans la base \mathcal{B} .
2. Donner les coordonnées de x dans la base \mathcal{B}' .
3. Déterminer la matrice de f dans la base \mathcal{B}' .

Exercice 35 On rappelle que X et A commutent signifie que $XA = AX$.

Trouver les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ puis celles qui commutent avec

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 36 1. En utilisant la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$, déterminer toutes les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AM = MA$ pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$.

2. Notons $S_n = \{M \in M_n(\mathbb{R}), {}^t M = M\}$ et $\mathcal{A}_n = \{M \in M_n(\mathbb{R}), {}^t M = -M\}$.

- (a) Montrer que S_n et \mathcal{A}_n sont des espaces vectoriels.
- (b) Démontrer que $M_n(\mathbb{R}) = S_n \oplus \mathcal{A}_n$.
- (c) Déterminer $\dim S_n$ et $\dim \mathcal{A}_n$.

Exercice 37 Préciser, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, pour quelles valeurs des nombres réels a et b le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x + ay + z = 3 \\ x + 2ay + z = 3 \\ x + y + bz = 3 \end{cases}$$

a zéro, une ou une infinité de solutions.

Exercice 38 La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 39 Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles, vérifiant la relation de récurrence linéaire suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -9x_n - 18y_n \\ y_{n+1} = 6x_n + 12y_n \end{cases}$$

avec $x_0 = -137$ et $y_0 = 18$. On se propose dans ce problème de trouver les termes généraux de ces deux suites.

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que la relation de récurrence linéaire ci-dessus soit équivalente à la relation $U_{n+1} = AU_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
2. Trouver une expression de U_n en fonction de A et de U_0 .
3. Trouver le noyau de A , et en donner une base B_1 . Calculer le rang de A .

4. Montrer que l'ensemble des vecteurs $X \in \mathbb{R}^2$ tels que $AX = 3X$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 . Quelle est sa dimension ? En donner une base, qu'on notera B_2 .
5. Montrer que la réunion $B_1 \cup B_2$ forme une base B de \mathbb{R}^2 . Soit P la matrice formée des composantes des vecteurs de B relativement à la base canonique de \mathbb{R}^2 . Montrer que P est inversible, et que le produit $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D qu'on calculera.
6. Montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$. Calculer D^n , et en déduire A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Donner les termes généraux x_n et y_n .
8. Quel est le lien avec les suites récurrentes linéaires?

Exercice 40 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}$$

Exercice 41 La famille $(2, 1, 0)$, $(1, 3, 1)$, $(5, 2, 1)$ de \mathbb{R}^3 est-elle libre?

Exercice 42 Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et soit

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & b & 1 \\ 1 & a & 1 & b \\ b & 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de A .
2. Etudier le rang de A suivant a et b et en déduire quand la matrice A est inversible.

Exercice 43 Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$ le rang des matrices $M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$ et $N_t =$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de t , ces matrices sont-elles inversibles?

Exercice 44 Posons $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ et pour $n \geq 4$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

1. Calculer Δ_2 et Δ_3 .

2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$.

3. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $\Delta_n = n + 1$.

Exercice 45 Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère le système d'équations linéaires :

$$(S) \begin{cases} 3ax + ay + 2z = -1 \\ ax + ay - 3z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

1. Ecrire (S) sous forme matricielle. On appellera A sa matrice.
2. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle inversible?
3. Calculer le rang de (S) en fonction de a .
4. Résoudre (S) en discutant selon les valeurs de a . (Pour chaque valeur de a discutée, décrire *soigneusement* l'ensemble des solutions de (S)).

Vecteurs propres - Polynômes caractéristiques

Exercice 46 Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres, les espaces propres des endomorphismes associés aux matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 47 Soit f l'endomorphisme associé dans la base canonique \mathcal{B} à la matrice A suivante

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f et en déduire les valeurs propres de f .
2. Déterminer une base de chaque espace propre. En déduire une base \mathcal{B}' de \mathbb{R}^2 constituée de vecteurs propres de f .
3. Ecrire la matrice B de f dans cette nouvelle base **puis** écrire la matrice P de passage entre les deux bases.
4. Quel est le lien entre A , B et P ?
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer B^n .
6. En déduire A^n .

Exercice 48 Reprendre l'exercice précédent (en remplaçant \mathbb{R}^2 par \mathbb{R}^3) avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 49 On considère l'endomorphisme dont la matrice f associée est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & b & 2 & 0 \\ \beta & \gamma & c & 2 \end{pmatrix}.$$

A quelles conditions les paramètres doivent-ils satisfaire pour que la somme des espaces propres de cette matrice soit égale à \mathbb{R}^4 ? Donner une base de \mathbb{R}^4 constituée de vecteurs propres de f lorsque ces conditions sont satisfaites.