Université de Bourgogne Année 2014-2015

Math22 : Algèbre

Mardi 10 mars - Durée 1h30

Questions de cours. (4 points)

1. Démontrer qu'une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est $\{0\}$.
2. Démontrer que si f est une application linéaire alors $f(F)$ est un espace vectoriel où F est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ.

Exercice 1 (4 points) Soient $O(0;0;0)$, $A(2;1;4)$, $B(1;1;-1)$, $C(2;1;2)$ et $D(2;2;0)$ des points de l'espace.

1. Déterminer une équation paramétrique de la droite (OA).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
3. Déterminer un vecteur orthogonal au plan (BCD).
4. Déterminer la distance de la droite (OA) au plan (BCD).

Exercice 2 (4 points)
Démontrer si les ensembles suivants sont ou ne sont pas des espaces vectoriels

$$E = \{P \in \mathbb{R}[X], /P \text{ est de degré pair}\} \quad \text{et} \quad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x \geqslant 0\}.$$

Exercice 3 (5 points) Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique. On définit l'endomorphisme f de E par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z+t \\ 2x+y+z \\ x+y+2z-t \\ x+2y-t \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau.
2. En déduire la dimension de l'image.
3. Déterminer une base de l'image.
4. A-t-on $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = \mathbb{R}^4$?

Exercice 4 (5 points) Soit E l'ensemble des polynôme de degré inférieur ou égal à 3. Soit φ l'application qui à un polynôme P associe le polynôme $\varphi(P)$ défini par

$$(X-1)P'.$$

1. Donner une base de E.
2. Montrer que si P est dans E alors $\varphi(P)$ est dans E.
3. Montrer que φ est une application linéaire.
4. Donner une base du noyau de φ.
5. Donner une base de l'image de φ.