
Math22 : AlgèbreMars 2016 - Durée 1h30

Questions de cours. (4 points)

Soit E un espace vectoriel et n un entier positif avec $n \geq 1$. On considère $\{u_1, \dots, u_n\}$ une famille de n vecteurs de E et soit v un autre vecteur de E .

1. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
 - (a) Si la partie $\{u_1, \dots, u_n\}$ est libre alors la partie $\{u_1, \dots, u_n, v\}$ est libre.
 - (b) Si la partie $\{u_1, \dots, u_n\}$ est génératrice alors la partie $\{u_1, \dots, u_n, v\}$ est génératrice.
 - (c) Si la partie $\{u_1, \dots, u_n, v\}$ est libre alors la partie $\{u_1, \dots, u_n\}$ est libre.
 - (d) Si la partie $\{u_1, \dots, u_n, v\}$ est génératrice alors la partie $\{u_1, \dots, u_n\}$ est génératrice.
2. Démontrer les résultats lorsque les affirmations sont fausses.

Exercice 1 (5 points)

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par $\{a, b\}$ et le sous-espace vectoriel G engendré par $\{c, d\}$ où :

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer des bases des sous-espaces vectoriels F , G et $F + G$.
2. Déterminer la dimension de $F \cap G$ et déterminer une base de $F \cap G$.
3. Déterminer les coordonnées de a , b , c et d dans la base de $F + G$ trouvée à la première question.

Exercice 2 (5 points) Soient $A(1; 1; 0)$, $B(1; 0; 1)$, $C(1; -1; 1)$ et $D(2; 0; 1)$ des points de l'espace.

1. Déterminer une équation paramétrique et une équation cartésienne de la droite (OA) .
2. Déterminer une équation paramétrique et une équation cartésienne du plan (BCD) .
3. Déterminer la distance de la droite (OA) au plan (BCD) .

Exercice 3 (8 points)

Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des suites réelles telles que pour tout entier n

$$u_{n+2} - u_{n+1} - 12u_n = 0.$$

On définit l'application ϕ de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à une suite (u_n) de E associe

$$\phi((u_n)) = (u_0, u_1).$$

1. Montrer que ϕ est une application linéaire.
2. Montrer par récurrence que si (u_n) est une suite de $\mathcal{E}$ vérifiant $u_0 = 0$ et $u_1 = 0$ alors la suite (u_n) est la suite nulle.
3. Déterminer le noyau de ϕ et en déduire si ϕ est injective ou pas.

Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par $a_n = (-3)^n$ et $b_n = 4^n$ pour tout entier n .

4. Montrer que ces 2 suites sont des éléments de $\mathcal{E}$.
5. Calculer $\phi((a_n))$ et $\phi((b_n))$ et montrer que $(\phi((a_n)), \phi((b_n)))$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.
6. En déduire que ϕ est surjective et la dimension de l'image de ϕ .
7. En utilisant le théorème du rang donner la dimension de $\mathcal{E}$.
8. En déduire une base de $\mathcal{E}$.