Université de Bourgogne Année 2013-2014

Math22 : Algèbre

Mai 2014 - Durée 2h00

Questions de cours. (4 points)

1. Démontrer qu'une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est $\{0\}$.
2. Soit f est une application linéaire et soit F est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ Démontrer que $f(F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée.

Exercice 1 (3,5 points) Soit E un espace vectoriel. Soient e_1, e_2, e_3 et u des vecteurs de E. Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. Si $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une partie libre de E alors $\{e_1, e_2, e_3, u\}$ est aussi une partie libre de E.
2. Si $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une partie libre de E alors $\{e_1, e_2\}$ est aussi une partie libre de E.
3. Si E est la somme directe directe de F et G alors $F \cup G = E$.

Donner un contre-exemple lorsqu'une affirmation est fausse.

Exercice 2 (7 points)
Soit f l'endomorphisme associé dans la base canonique $\mathcal{B}$ à la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f et en déduire les valeurs propres de f.
2. Déterniner une base de chaque espace propre. En déduire une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres de f.
3. Ecrire la matrice B de f dans cette nouvelle base puis calculer B^n pour tout entier n.
4. Ecrire la matrice P de passage entre les deux bases et donner le lien entre A, B et P.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n.

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, vérifiant la relation de récurrence linéaire suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & -9x_n & -18y_n \\ y_{n+1} & = & 6x_n & +12y_n \end{cases}$$

avec $x_0 = -137$ et $y_0 = 18$.

6. Ecrire sous forme matricielle la relation de récurrence.
7. Donner une expression de x_n et de y_n en fonction de n.

Exercice 3 (7 points) Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 les fonctions numériques réelles définies par

$$f_1(x) = x\ln(x), \quad f_2(x) = \ln(x), \quad f_3(x) = x, \quad et, \quad f_4(x) = 1.$$

Soit E l'espace vectoriel engendré par ces 4 fonctions. On admet pour la suite que $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ forme une partie libre de E.

1. Quelle est la dimension de E.

   Soit f une fonction dérivable et soit $\varphi(f)$ la fonction définie par $\varphi(f)(x) = xf'(x) - f(x)$.

2. Calculer $\varphi(f_1)$, $\varphi(f_2)$, $\varphi(f_3)$ et $\varphi(f_4)$ ety montrer que ce sont des éléments de E.

3. Montrer que φ est un endomorphisme de E.

4. Quelle est la matrice de φ dans une base qu'on aura pris soin de préciser.

5. Quel est le noyau de φ et sa dimension.

6. Quelle est la dimension de l'image de φ et déterminer une base de celle-ci.