Université de Bourgogne Année 2014-2015

Math22 : Examen

Vendredi 22 mai - Durée 2h00

Questions de cours. (4 points)
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Soient λ et μ deux valeurs propres de f. Soient E_λ et E_μ les deux espaces propres associés.

1. Montrer que E_λ est stable par f.
2. Montrer que $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$ si et seulement si $\lambda \neq \mu$.

Exercice 1 (4 points)
Soient les matrices A et B définies par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer $det(A)$, $det(B)$, $det(AB)$, $det(-2B)$, $det(A^{-1})$ et $det(A+B)$.

Exercice 2 (8 points)
Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (-x - 2y - z, -2x + 2y - 2z, -x + 2y - z)$ pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$. Notons A la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3).

1. Ecrire la matrice A.
2. Donner le rang de f et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Déterminer les 3 valeurs propres de f.
4. Déterminer un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres. On nomme v_1, v_2 et v_3 les vecteurs trouvés.
5. Montrer que $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Sans faire de calculs, donner la matrice D de f dans la base $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$.
7. Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$.
8. Donner l'égalité qui relie les matrices D, A et P.
9. Pour $n \in \mathbb{N}$, écrire D^n. Comment peut-on en déduire A^n (ne pas faire le calcul).
10. Soient (x_n), (y_n) et (z_n) trois suites réelles, vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= -x_n - 2y_n - z_n \\ y_{n+1} &= -2x_n + 2y_n - 2z_n \\ z_{n+1} &= -x_n + 2y_n - z_n \end{cases}$$

avec $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et $z_0 = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Donner l'égalité matricielle qui relie U_n et U_0.

Exercice 3 (6 points)

1. Déterminer la dimension de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ engendré par les 3 fonctions suivantes

$$\sin x, \qquad \sin 2x, \qquad \sin 3x.$$

2. Déterminer la dimension de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ engendré par les 3 fonctions suivantes

$$\exp x, \qquad \exp 2x, \qquad \exp 3x.$$

3. Déterminer la dimension de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ engendré par les 3 fonctions suivantes

$$\ln x, \qquad \ln 2x, \qquad \ln 3x.$$