Math22 : Examen

Vendredi 20 mai - Durée 2h00

Questions de cours. (6 points)
Soit f un application linéaire d'un espace E vers un espace F (tous les deux de dimension finie).

1. Démontrer que f est injective si et seulement si son noyau est $\{0\}$.
2. On suppose ici que f est injective. Démontrer que l'image d'une partie libre est une partie libre.
3. Enoncer le théorème du rang.
4. On suppose ici que les dimensions de E et de F sont égales et encore que f est injective. Démontrer que l'image d'une base est une base.

Exercice 1 (3 points)
Notations :

- $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à une variable X à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.
- P' désigne le polynôme dérivé du polynôme P.

On considère l'application f définie par : pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$f(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P^{'}.$$

1. Donner une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la matrice A de f dans la base choisie précédemment de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2 (6 points)
Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire de matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $t \in \mathbb{R}$ et considérons f_t l'application linéaire associée à la matrice $A_t = A - tId$. Calculer le déterminant de A_t.
2. En déduire les valeurs de t pour lesquelles A_t n'est pas inversible.
3. Donner une base du noyau de f_3.

4. Donner le rang de f_{-1} et en déduire la dimension du noyau de f_{-1}.

5. Montrer que $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} f_{-1} \oplus \operatorname{Ker} f_3$.

6. Notons (u_1, u_2, u_3, u_4) la nouvelle base de $\mathbb{R}^4$ obtenue en faisant l'union d'une base de $\operatorname{Ker} f_{-1}$ et d'une base de $\operatorname{Ker} f_3$. Déterminer, sans calculs, la matrice B de f dans cette nouvelle base.

Exercice 3 (6 points)
On considère le système d'équations linéaires :

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} 2x + (a-1)y - 2az = 2 \\ x + -2(a-1)y + az = 6 \\ x + (a-1)y - 2az = 2a \end{array} \right.$$

où a désigne un paramètre réel.

1. Ecrire sous forme matricielle le système (S).

2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le système (S) a une solution et une seule.

3. Donner le rang de (S) pour $a = 1$

4. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) pour $a = 1$.

5. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) pour $a = 0$.

6. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) pour $a = 2$.