Math22 : Examen

Vendredi 19 mai - Durée 2h00

Questions de cours. (7 points)
a) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Soient λ et μ deux valeurs propres de f. Soient E_λ et E_μ les deux espaces propres associés.

1. Montrer que E_λ est stable par f.
2. Montrer que $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$ si et seulement si $\lambda \neq \mu$.

b) Soit f un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si $\{u, v, w\}$ est une partie libre de $\mathbb{R}^n$ alors $\{f(u), f(v), f(w)\}$ est une partie libre de $\mathbb{R}^n$.
c) Soit P une matrice inversible. Soient A et B deux matrices telles que $B = P^{-1}AP$. Démontrer que les déterminants de A et B sont égaux.

Exercice 1 (4 points)
Soit D une matrice **diagonale** d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ telle que

$$(A - 2I)(A + 3I) = 0.$$

1. Montrer que si λ est une valeur propre de f alors $(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$.
2. En déduire toutes les matrices D possibles.

Exercice 2 (6 points)
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ associé dans la base canonique $\mathcal{B}$ à la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f et en déduire les valeurs propres de f.
2. Déterniner une base de chaque espace propre. En déduire une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres de f.
3. Ecrire la matrice B de f dans cettte nouvelle base **puis** écrire la matrice P de passage entre les deux bases.
4. Quel est le lien entre A, B et P?
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer B^n
6. En déduire A^n.

Exercice 3 (5 points)
Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique (i, j, k). On définit l'endomorphisme f de E par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + z \\ x + 2y - z \\ -x + y - 2z \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer Im f. Préciser sa dimension ainsi qu'une base.
2. Donner la dimension de Ker f ainsi qu'une base.
3. Montrer que Ker $f \oplus$ Im $f = \mathbb{R}^3$.