Math22 : Algèbre

Session 2 - Juin 2014 - Durée 2h00

Questions de cours. (4 points)
Soit E un espace vectoriel et n un entier positif avec $n \geqslant 1$. On considère $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une famille de n vecteurs de E.

1. Donner une définition de chacunes des notions suivantes
   (a) La partie $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est libre.
   (b) La partie $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une partie génératrice de E.
   (c) La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E.
2. Que peut-on dire de la dimension de E dans chacun des cas suivants?
   (a) Si la partie $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est libre.
   (b) Si la partie $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est génératrice dans E.
   (c) Si la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E.

Exercice 1 (4 points) Donner l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants.

1.
$$\begin{cases} x - 5z & = 1 \\ 2x + y - 3z & = 2 \\ 2x + 2y + 4z & = 3 \end{cases}.$$

2.
$$\begin{cases} 2x + y + 3z - 2t & = 1 \\ x + 2z - t & = 1 \\ x + 2y + 2z + 3t & = 1 \end{cases}.$$

3.
$$\begin{cases} -x - 3y - 2z & = 1 \\ y + 3z & = 0 \\ 2y + 3z & = 0 \end{cases}.$$

Exercice 2 (5,5 points)
Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui même défini par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 4y \\ 2x - 3y \end{pmatrix}.$$

1. Donner la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer le polynôme caractéristique de A et en déduire ses deux valeurs propres λ_1 et λ_2.
3. Pour $i = 1$ et 2, donner une base $\mathcal{B}_i$ de espace propre E_{λ_i} associé à la valeur propre λ_i.

4. Montrer que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

5. Donner la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$.

6. Donner la matrice P de passage entre la base $\mathcal{B}$ et la base canonique. En déduire la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.

7. Calculer A^{2014}.

Exercice 3 (2,5 points)
Pour chacune des matrices suivantes, calculer leur déterminant et en déduire si elles sont inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -3 \\ 7 & -4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 (4 points)
Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 2×2. On considère l'application f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto AN - NA, \end{aligned}$$

où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

2. Montrer que f est une application linéaire.

3. Déterminer les $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Ker(f)$.

4. Quelle est la dimension de $Ker(f)$?

5. Quelle est la dimension de $Im(f)$?