Math22 : Examen

Vendredi 24 juin - Durée 2h00

Questions de cours. (4 points)
Soit E un espace vectoriel et n un entier positif avec $n \geqslant 1$. On considère $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une famille de n vecteurs de E et soit v un autre vecteur de E.

1. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
   (a) Si la partie $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est libre alors la partie $\{u_1, \ldots, u_n, v\}$ est libre.
   (b) Si la partie $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est génératrice alors la partie $\{u_1, \ldots, u_n, v\}$ est génératrice.
   (c) Si la partie $\{u_1, \ldots, u_n, v\}$ est libre alors la partie $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est libre.
   (d) Si la partie $\{u_1, \ldots, u_n, v\}$ est génératrice alors la partie $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est génératrice.
2. Démontrer les résultats lorsque les affirmations sont fausses.

Exercice 1 (6 points)
Soit $E = \mathbb{R}^3$, on définit deux endomorphismes f et g par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ -x - 2y + z \\ 2x + 4y - 2z \end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ 2x - y + 2z \\ 3x + z \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer Ker f et Ker g (équation et base).
2. Quelles sont les dimensions de Im f et Im g ?
3. Donner une base de Im f et de Im g .
4. Montrer que Ker $f \oplus$ Ker $g = \mathbb{R}^3$.

Exercice 2 (5 points)
Soit $a \in \mathbb{R}$.On considère le système d'équations linéaires :

$$(S)\begin{cases} 3ax + ay + 2z = -1 \\ ax + ay - 3z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

1. Ecrire (S) sous forme matricielle. On appellera A sa matrice.
2. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle inversible?
3. Calculer le rang de (S) en fonction de a.

4. Résoudre (S) lorsque la matrice A n'est pas inversible.

Exercice 3 (5 points) Parmi les ensembles suivants, indiquer si ce sont des sous-espaces vectoriels :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\};$$
$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xy = 0\};$$
$$G = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(1) = 0\};$$
$$H = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(0) = 1\}.$$

Démontrer le résultat annoncé lorsque ce n'est pas un espace vectoriel