Math32 : Contrôle continu

Lundi 4 novembre - Durée 1h30

Questions de cours. (5 points)
Enoncer et démontrer le lemme des noyaux.

Exercice 1 (5 points)
Soit $m \in \mathbb{R}$ et soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -m-1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Discuter de la trigonalisation et de la diagonalisation de A sur $\mathbb{C}$.
3. Discuter de la trigonalisation et de la diagonalisation de A sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (13 points)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n. Soit u un endomorphisme de E ayant n valeurs propres **deux à deux distinctes** : $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Soit $C(u)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u c'est-à-dire :

$$C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E, E) / u \circ v = v \circ u\}.$$

Pour la suite λ désigne une valeur propre de u et on note E_λ l'espace propre associé.

1. Justifier que u est diagonalisable et donner la dimension des espaces propres de u.
2. Soit $v \in C(u)$.
   (a) Montrer que E_λ est stable par v c'est-à-dire
   $$\forall x \in E_\lambda \qquad v(x) \in E_\lambda.$$
   (b) Soit $x \in E_\lambda$. A l'aide de 1. et 2.a montrer qu'il existe un nombre λ' tel que $v(x) = \lambda' x$.
   (c) Soit $\mathcal{B}$ une base de E constituée de vecteurs propres de u. Montrer que la matrice de v dans cette base est diagonale.
3. Montrer que $C(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, E)$.
4. A l'aide de 2.c montrer que la dimension de $C(u)$ est inférieure à n.
5. Montrer que $Vect\{id, u, u^2, ..., u^{n-1}\} \subset C(u)$.

6. Soient $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ des cœfficients tels que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i = \alpha_0 id + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + ... + \alpha_{n-1} u^{n-1} = 0.$$

   (a) Soit x un vecteur propre de u associée à la valeur propre λ. Que donne l'égalité précédente quand elle est appliquée à x?

   (b) En déduire que les cœfficients $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ satisfont le système suivant

$$\left\{\begin{array}{cccccccccl} {\lambda_1}^0\alpha_0 & + & {\lambda_1}^1\alpha_1 & + & {\lambda_1}^2\alpha_2 & + & \cdots & + & {\lambda_1}^{n-1}\alpha_{n-1} & = 0 \\ {\lambda_2}^0\alpha_0 & + & {\lambda_2}^1\alpha_1 & + & {\lambda_2}^2\alpha_2 & + & \cdots & + & {\lambda_2}^{n-1}\alpha_{n-1} & = 0 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = \vdots \\ {\lambda_n}^0\alpha_0 & + & {\lambda_n}^1\alpha_1 & + & {\lambda_n}^2\alpha_2 & + & \cdots & + & {\lambda_n}^{n-1}\alpha_{n-1} & = 0 \end{array}\right. .$$

   (c) Quel est le déterminant correspondant? Est-il nul?

   (d) Résoudre ce système et en déduire que $\{id, u, u^2, ..., u^{n-1}\}$ est une partie libre de $\mathcal{L}(E, E)$.

7. En déduire la dimension de $Vect\{id, u, u^2, ..., u^{n-1}\}$.

8. Montrer que $Vect\{id, u, u^2, ..., u^{n-1}\} = C(u)$.