Math32 : Contrôle continu

Jeudi 26 novembre - Durée 1h30

Questions de cours. (5 points)

1. Enoncer sans le démontrer le théorème de Cayley-Hamilton.

2. Démontrer que le polynôme minimal et le polynôme caractéristique d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ ont les mêmes racines (on ne tient pas compte ici de la multiplicité).

3. Donner un exemple d'endomorphisme où le polynôme minimal et le polynôme caractéristique sont différents.

Exercice 1 (3 points) Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
On définit aussi $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.

2. Calculer la base duale de $\mathcal{B}'$.

Exercice 2 (8 points)
Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et soit φ l'application de E dans E qui à un polynôme P associe le polynôme $\varphi(P)$ défini par

$$\varphi(P)(X) = P(X + 1) - P(X).$$

1. Vérifier que l'image par φ du polynôme X^2 est le polynôme $2X + 1$.

2. Montrer que φ est un endomorphisme.

3. Soit $P \in Ker(\varphi)$.

   (a) Soit n un entier. Démontrer en utilisant le théorème des accroissements finis que P' a une racine dans l'intervalle $]n; n + 1[$.

   (b) En déduire que P' a une infinité de racines.

   (c) En déduire que P est un polynôme constant.

4. Démontrer que si P est un polynôme non nul alors le degré de $\varphi(P)$ est strictement inférieur à celui de P.

5. A l'aide des questions précédentes montrer que 0 est la seule valeur propre de φ

6. Montrer que si P et Q ont même image par φ alors $P - Q$ est dans le noyau de φ.

7. Déterminer tous les antécédents du polynôme $2X + 1$.

Exercice 3 (6 points)
Soit $E = \mathbb{R}^n$ avec $n \geqslant 2$. Soit H un sous-espace de E de dimension $n-1$ et soit $(e_1, ..., e_{n-1})$ une base de H. Soit e un vecteur de E n'appartenant pas à H. Enfin soit f un endomorphisme de E qui laisse invariant tous les éléments de H (c'est-à-dire pour tout u dans H alors $f(u) = u$).

1. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_{n-1}, e)$ est une base de E.
2. Montrer qu'il existe un unique vecteur u_H de H et un unique nombre réel α tel que
$$f(e) = u_H + \alpha e.$$
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
4. Déterminer les valeurs propres de f.
5. On suppose ici que $\alpha \neq 1$.
   (a) Montrer que $e' = e - f(e)$ est un vecteur propre de f
   (b) Donner une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.
6. On suppose ici que $\alpha = 1$ et $f \neq id$.
   En procédant par l'absurde montrer qu'il n'existe pas de base où la matrice de f est diagonale.