Math32 : Contrôle terminal

Mercredi 20 décembre - Durée 2h00

Questions de cours. (5 points)

1. Enoncer sans le démontrer le lemme des noyaux.
2. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Soit P un polynôme.
   (a) Montrer que si λ est une valeur propre de f alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(f)$.
   (b) Que pensez-vous de la réciproque de l'affirmation précédente? (On justifiera la réponse donnée)

Exercice 1 (5 points)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est A définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On pose aussi

$$D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ et, \ N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ et, \ N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ et, \ N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Donner la valeur de l'indice i tel que la décomposition $A = D_i + N_i$ corresponde à la décomposition de Dunford de f. Justifier vos réponses.
2. Calculer $exp(D_i)$ et $exp(N_i)$ pour l'indice trouvé à la question précédente.
3. En déduire $exp(A)$.

Exercice 2 (5 points)
Soit A la matrice d'ordre 3 suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice associée dans la base canonique.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de f.
2. En utilisant que 1 est une valeur propre de f factoriser le polynôme caractéristique de f.
3. Déterminer la diagonalisabité et la trigonalisabilité de f.
4. Calculer les projecteurs spectraux de f.

Exercice 3 (8 points)
Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et soit $\Delta : E \to E$ l'application définie par

$$\Delta(y) = y'' - 6y' + 9y.$$

1. Montrer que Δ est un endomorphisme.
2. On admet que $dim(ker\Delta) = 2$. On pose $f_1(x) = e^{3x}$ et$f_2(x) = xe^{3x}$. Montrer que (f_1, f_2) est une base du noyau de Δ.
3. Montrer que $\Delta(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

   On considère désormais l'endomorphisme $\Delta_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ induit par Δ sur l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
4. Calculer $\Delta_n(X^k)$, pour tout entier naturel $k \leqslant n$, et en déduire la matrice de Δ_n dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Montrer que Δ_n est inversible.

   Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions dans E de l'équation différentielle

   $$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = P(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$
6. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Delta_n(Q) = P$. Puis en déduire que il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Delta(Q) = P$.
7. Soient y_1 et y_2 dans $\mathcal{S}$, montrer que $y_1 - y_2$ est dans le noyau de Δ.
8. En déduire que $\mathcal{S}$ est l'ensemble des fonctions de la forme $Q + y_0$, avec y_0 dans le noyau de Δ.
9. Résoudre

   $$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 9x^2 - 3x + 5, \quad x \in \mathbb{R}.$$