Math32 : Contrôle terminal

Session 2 - Durée 2h00

Questions de cours. (4 points)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit u un endomorphisme de E. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ premiers entre eux. Démontrer que

$$\text{Ker } PQ(u) = \text{Ker } P(u) \oplus \text{Ker } Q(u).$$

Exercice 1.(4 points) Soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 5 & -6 \\ -2 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer $A^2 - 3A$.
2. En déduire que A se diagonalise sur $\mathbb{R}$.
3. Donner les valeurs propres de A.
4. Donner une base de chaque sous-espace propre.

Exercice 2. (8 points)
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Donner les valeurs de a et b pour que la décomposition de Dunford de A soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On pose $a = 3$ et $b = 0$. Résoudre le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \dot{x} & = & 1x & + & 3y & + & 0z \\ \dot{y} & = & 0x & + & 1y & + & 0z \\ \dot{z} & = & 0x & + & 0y & + & 2z \end{array} \right.$$

3. On pose $a = 1$ et $b = 1$. Soit (i, j, k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note f l'endomorphisme dont la matrice associée est A dans cette base.

   (a) Quelles sont les valeurs propres de f.

   (b) Déterminer u un vecteur propre associé à la plus grande des valeurs propres.

   (c) Montrer que (i, j, u) est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (d) Déterminer la matrice B associée à f dans cette nouvelle base.

   (e) Déterminer la décomposition de Dunford de B.

   (f) Déterminer la décomposition de Dunford de A.

Exercice 3.(6 points)
On cherche $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\dddot{y}(t) - 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = 0,$$

avec $t \in \mathbb{R}$.

1. On pose $X(t) = (y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\dot{X}(t) = AX(t)$ où A est une matrice que l'on précisera.

2. Déterminer le rang de $A - 2I$ et en déduire que 2 est valeur propre.

3. Déterminer les valeurs propres de A sur $\mathbb{C}$ et en déduire que A se diagonalise.

4. Déterminer les projecteurs spectraux (on pourra les écrire comme un polynôme, à préciser, de la matrice A).

5. Calculer e^{tA} avec $t \in \mathbb{R}$, éventuellement sous la forme d'un polynôme de A.

6. En déduire les solutions de l'équation différentielle.