Feuille n° 1

Espaces vectoriels

Exercice 1 Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y \leqslant 0 \right\}, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y \geqslant 0 \right\}, \quad A \cup B, \quad A \cap B, \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\},$$

$$D = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad E = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 2 Dire si les objets suivants sont des espaces vectoriels :

1. L'ensemble des fonctions réelles sur $[0,1]$, continues, positives ou nulles, pour l'addition et le produit par un réel.
2. L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ vérifiant $f(\frac{1}{2}) = 0$.
3. L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ vérifiant $f(\frac{1}{2}) = 2$.
4. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui sont nulles en 1 ou en 4.
5. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui sont nulles en 1 et en 4.
6. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui peuvent s'écrire comme somme d'une fonction nulle en 1 et d'une fonction nulle en 4.

Exercice 3 Donner les bases canoniques $\mathcal{B}$ des espaces ci-dessous. Pour chaque v dans l'espace, trouver sa colonne de composantes dans $\mathcal{B}$:

- $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $v = -1 + i$;
- $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $v = 2 + 4i$;
- $\mathbb{K}^n$ comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$;
- l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels, $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$, comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

1. Démontrer que $(1, X, ..., X^n)$ est une base de E.
2. Soient $P_0, \ldots, P_n$ des polynômes tels que $\deg(P_i) = i$. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de E.

Exercice 5 Considérons les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x - y - 2t = 0 \text{ et } x + t = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x - z + t = 0 \text{ et } y + z = 0\}$$

1. Trouver une base de F et de G.
2. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires? Sinon, donner une base de la somme.

Exercice 6 Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u_1 = (1, 2, 3, 1)$, $u_2 = (1, 1, 2, 0)$ et $u_3 = (2, 2, 1, 3)$.

1. Donner une base de F.
2. Donner F sous forme paramétrique.
3. Donner F sous forme cartésienne.

Exercice 7 Soient $a \neq 0$, b et c trois nombres réels. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites (u_n) telle que

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0,$$

pour tout entier n.

1. Démontrer que $\mathcal{E}$ est une espace vectoriel.
2. Démontrer que la dimension est 2.
3. Rappeler comment on peut exprimer toutes les suites de $\mathcal{E}$.

Feuille n° 2

Applications linéaires - Matrices

Exercice 8 Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique (e_1, e_2, e_3). On définit l'endomorphisme f de E par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+z \\ x+2y-z \\ -x+y-2z \end{pmatrix}.$$

1. On définit $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

    a- Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

    b- Calculer $f(u_1), f(u_2)$ et $f(u_3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

    c- Soit u de coordonnées $(1, -3, 2)$ dans la base $\mathcal{B}$.

    (i) Donner les coordonnées de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

    (ii) Donner les coordonnées de $f(u)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

    (iii) Donner les coordonnées de $f(u)$ dans $\mathcal{B}$.

2. Déterminer Im f. Préciser sa dimension ainsi qu'une base.

3. En utilisant le théorème du rang et la question 1-b- déterminer Ker f. Préciser sa dimension ainsi qu'une base.

4. Montrer que Ker $f \oplus$ Im $f = \mathbb{R}^3$.

Exercice 9 Soient V, V' deux espaces vectoriels, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de V et $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ une famille de n vecteurs dans V'.

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f : V \to V'$ telle que $f(e_i) = v'_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.

2. Montrer que f est injective si et seulement si $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ est libre.

3. Montrer que f est surjective si et seulement si $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ engendre V'.

Exercice 10 Soient E un espace vectoriel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E, et λ un paramètre réel.

1. Démontrer que la donnée de

$$\begin{cases} \varphi(e_1) &= e_1 + e_2 \\ \varphi(e_2) &= e_1 - e_2 \\ \varphi(e_3) &= e_1 + \lambda e_3 \end{cases}$$

définit une application linéaire φ de E dans E.

2. Écrire la transformée du vecteur $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ par φ. Comment choisir λ pour que φ soit injective ? surjective ?

Exercice 11 Pour les applications linéaires ci-dessous, déterminer le noyau et l'image. En déduire si u est injective, surjective, bijective.

$$\begin{array}{rcl} u : (x,y) \in \mathbb{R}^2 & \mapsto & (2x+y, ax-y) \in \mathbb{R}^2 \,, \\ u : P \in \mathbb{R}_3[X] & \mapsto & P' \in \mathbb{R}_2[X] \,, \\ u : P \in \mathbb{R}_3[X] & \mapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^3 \,, \\ u : P \in \mathbb{R}[X] & \mapsto & aP' + P \in \mathbb{R}[X] \,, \\ u : P \in \mathbb{R}[X] & \mapsto & P - (X-2)P' \in \mathbb{R}[X] \end{array}$$

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit p un projecteur de E (c'est-à-dire une application linéaire p de E dans E telle que $p \circ p = p$). Soit $q = Id_E - p$.

1. Montrer que q est un projecteur.
2. Montrer que le noyau de p et le noyau de q sont supplémentaires dans E. On prend désormais une base de E constituée tout d'abord d'une base de $\operatorname{Ker} p$ complétée par une base de $\operatorname{Ker} q$.
3. Donner la matrice de p dans cette base.
4. Donner la matrice de q dans cette base.
5. On pose $s = p - q$, calculer $s \circ s$. Que représente géométriquement s?

Exercice 13 Soit T l'opérateur de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$T(X) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5x + 2y - z \\ 2x + 2y + 2z \\ -x + 2y + 5z \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

1. Trouver la matrice de T dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que T est un projecteur.
3. Trouver une base de $W = \operatorname{Im}(T)$ et de $W' = \ker(T)$. Écrire la matrice $\widetilde{M}$ de T dans la base correspondante. Trouver une matrice inversible P telle que $\widetilde{M} = P^{-1}MP$.

Exercice 14 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $\varphi(P)$ défini par

$$\varphi(P)(X) = P(X+1).$$

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Donner la matrice A de φ dans sa base canonique. A quoi cela vous fait-il penser?
3. Montrer que φ est bijective et donner son application réciproque.
4. Donner la matrice B de φ^{-1} toujours dans la base canonique.
5. En déduire la matrice inverse de A.

Exercice 15 Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
On définit aussi $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.
2. Calculer la base duale de $\mathcal{B}$.
3. Calculer la base duale de $\mathcal{B}'$.
4. Que remarquez-vous?

Exercice 16 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre n.

1. Montrer que l'application trace est une forme linéaire sur E.
2. Montrer que la trace de 2 matrices semblables est identique.
3. Quelle peut être la trace d'une matrice correspondant à un projecteur?
4. Résoudre l'équation d'inconnues A et B de E :
$$AB - BA = I,$$
où I est la matrice de l'application identité.

Exercice 17 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ qui à un polynôme P associe le nombre $\varphi(P)$ défini par
$$\varphi(P) = \int_0^1 P(t)dt.$$

1. Montrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. Pour tout entier i compris entre 0 et n on définit sur $\mathbb{R}_n[X]$ les formes linéaires ψ_i par
$$\psi_i(P) = P(i/n).$$
2. Montrer que $\widetilde{\mathcal{B}} = (\psi_0, \psi_1, \cdots, \psi_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$.
3. En déduire qu'il existe des nombres réels $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tels que
$$\int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(i/n),$$
pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Pour $n = 2$, calculer λ_0, λ_1 et λ_2.
5. Déterminer la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ telle que la base duale de $\mathcal{B}$ soit $\widetilde{\mathcal{B}}$.

Déterminants - Diagonalisation

Exercice 18 Soient les matrices A et B définies par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer de la façon la plus intelligente possible $det(A)$, $det(B)$, $det(AB)$, $det(-2B)$, $det(A^{-1})$, $det(A) + det(B)$ et $det(A + B)$.

Exercice 19 La famille $(2, 1, 0)$, $(1, 3, 1)$, $(5, 2, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ est-elle libre?

Exercice 20 La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 21 Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et Δ_n le déterminant d'ordre n suivant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & x & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

1. Calculer Δ_1, Δ_2 et Δ_3.
2. Montrer que pour tout n on a $(\Delta_{n+2} - \Delta_{n+1}) = x^2(\Delta_{n+1} - \Delta_n)$.
3. Donner une expression de Δ_n.

Exercice 22 Soit A une matrice carrée d'ordre p et soit C une matrice carrée d'ordre q. On suppose dans un premier temps que A est inversible. Soient les matrices M et N d'ordre $n = p + q$ suivantes

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$$

où B est une matrice aux dimensions correctes pour que le tout soit cohérent.

1. Calculer MN puis $det(MN)$ et en déduire $det(M)$.
2. Quel résultat a-t-on si A n'est pas inversible?

Exercice 23 Soient les matrices A, B et C définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

Déterminer si les matrices ci-dessus sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$ et/ou sur $\mathbb{C}$.

Exercice 24 Soient la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n.
3. On définit par récurrence les suites (x_n), (y_n) et (z_n) par

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & x_n + z_n \\ y_{n+1} & = & y_n + z_n \\ z_{n+1} & = & 2z_n \end{cases}$$

   pour tout entier n.

   Donner une expression générale de chacune de ces suites en fonction des conditions initiales.

Exercice 25 Soient A et B deux matrices réelles d'ordre n.

1. On suppose ici que A est inversible. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Calculer $A^{-1}(AB - \lambda I)$ et en déduire une expression du polynôme caractéristique de AB.
   (b) Calculer $(BA - \lambda I)A^{-1}$ et en déduire une expression du polynôme caractéristique de BA.
   (c) Que peut-on en déduire sur les polynômes caractéristiques de AB et BA?
2. Soit $\varepsilon > 0$ (donc non nul) et soit $A_\varepsilon = A + \varepsilon I$.
   (a) Exprimer le polynôme caractéristique de A_ε à l'aide de celui de$A$.
   (b) Comment sont les valeurs propres de A_ε par rapport à celles de A.
   (c) En déduire que si ε est assez petit 0 n'est pas valeur propre de A_ε et que A_ε est inversible.
   (d) En déduire que les polynômes caractéristiques de $A_\varepsilon B$ et de BA_ε sont les mêmes.
   (e) Que peut-on en déduire en faisant tendre ε vers 0?

Exercice 26 *Interpolation polynomiale.*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels distincts et soient $y_0, y_1, \ldots, y_n$ des nombres réels distincts ou non. Le but de l'exercice est de déterminer le polynôme P égale à $a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ tel que pour tout entier i on a $P(x_i) = y_i$.

1. Ecrire le système correspondant, calculer son rang et en déduire que le polynôme recherché existe et est unique.

   Résoudre ce système directement est long et fastidieux, la suite de l'exercice permet de le faire plus "simplement".

2. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soit φ_i l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à un polynôme P associe $P(x_i)$ pour tout entier $i \leqslant n$. Montrer que $\varphi_i \in E^*$ (le dual de E).

3. On pose $\widetilde{\mathcal{B}} = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Montrer que c'est bien une base de E^*.

4. Pour tout entier j on pose

$$L_j = \frac{(X - x_0)\ldots(X - x_{j-1})(X - x_{j+1})\ldots(X - x_n)}{(x_j - x_0)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_n)} = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{X - x_k}{x_j - x_k}$$

   Ce sont les polynômes de Lagrange.

   (a) Montrer que pour tout entier i et pour tout entier j on a

$$L_j(x_i) = \delta_{i,j} \qquad \text{et,} \qquad \varphi_i(L_j) = \delta_{i,j}$$

   (b) En déduire que $\mathcal{B}$ est une base de E.

   (c) En déduire aussi que sa base duale est $\widetilde{\mathcal{B}}$.

   C'est une définition de la base anteduale d'une base du dual.

5. On pose $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} y_j L_j$. Montrer que P est bien le polynôme recherché.

6. Pour tout entier i on pose $X^i = \displaystyle\sum_j \alpha_{i,j} L_j$. La matrice $V = (\alpha_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ est donc une matrice de passage entre la base canonique de E et la base $\mathcal{B}$.

   Calculer les cœfficients de cette matrice en appliquant successivement cette égalité à $x_0, x_1, \ldots, x_n$, puis constater que V est une matrice de Vandermonde.

   On ne cherchera pas à calculer son inverse!

Polynôme à une indéterminée
Polynôme caractéristique et minimal

Sauf mention contraire les polynômes sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec $\mathbb{K}$ le corps des nombres rationnels ou bien des nombres réels ou encore celui des nombres complexes.

Exercice 27 Soient les polynômes $A = X^5 + 3X^3 + 1$ et $B = X^2 - 1$. Déterminer

1. le plus grand diviseur commun de A et B : $A \wedge B$;
2. deux polynômes U et V tels que $AU + BV = A \wedge B$.

Reprendre l'exercice avec $A = X^4 + 2X^2 + 1$ et $B = X^2 - 4$.

Exercice 28 Soient les polynômes $A = X - 1$, $B = (X - 1)^3$ et $C = (X - 1)^2(X + 1)^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par A, puis B et enfin C.

Exercice 29 Soient A et B deux polynômes unitaires de $\mathbb{K}[X]$. Soit P un polynôme, on note $\mathcal{I}_P$ l'idéal des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ divisibles par P.

1. Montrer que $\mathcal{I}_A \cap \mathcal{I}_B$ est un idéal. On note $A \vee B$ le polynôme unitaire tel que
$$\mathcal{I}_A \cap \mathcal{I}_B = (A \vee B)\mathbb{K}[X].$$
2. Montrer que $(A \wedge B)(A \vee B) = AB$.

Exercice 30 Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

1. Montrer que si α est racine de $P \wedge Q$ alors α est racine de P.
2. On prend désormais $Q = P'$ et on pose $R = \frac{P}{P \wedge Q}$. Soit k un entier naturel non nul.
   (a) Montrer que “ $(X - \alpha)^k$ divise P” est équivalent à “$(X - \alpha)^{k-1}$ divise P' ”.
   (b) Montrer que “ α est racine de P” est équivalent à “α est racine simple de R ”.

Exercice 31
1. Soit f la fonction numérique qui à un réel x associe le réel $f(x) = x + 1$ et soit P défini par $P(X) = X$. Après avoir levé les éventuelles ambiguités de notations, calculer : $P(f)$, $P(f) \circ P(f)$ et $P^2(f)$.
2. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et soient P et Q des polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Justifier que
$$P(f) \circ Q(f) = (PQ)(f) = (QP)(f) = Q(f) \circ P(f).$$

Exercice 32 Soit $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ et soit λ une valeur propre de A. Prouver que :

1. $\lambda + \alpha$ est valeur propre de $A + \alpha I$ pour tout α dans $\mathbb{K}$.
2. $\lambda \neq 0$ et λ^{-1} est valeur propre de A^{-1} si A est inversible.
3. $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(A)$ si $P \in \mathbb{K}[X]$. En déduire que si A annule P, $P(\lambda) = 0$.

Exercice 33 Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -12 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Quelles sont les valeurs propres de A^5.

Exercice 34 Déterminer les valeurs propres, les sous-espaces propres des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis calculer A^n et B^n pour tout entier naturel n.

Exercice 35 Soit M une matrice carrée complexe tel qu'il existe un entier p vérifiant $M^p = I$. Montrer que M est diagonalisable.
Que peut-on dire de la diagonalisabilité sur $\mathbb{R}$ lorsque la matrice est à cœfficients réels?

Exercice 36 *Dans cet exercice* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Soit $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$, soit $P = \chi_A$ le polynôme caractéristique de A et enfin soit $R = \frac{P}{P \wedge P'}$.

1. Rappeler ce que signifie le mot "scindé" et dans quels résultats sur la diagonalisabilité et la trigonalisabilité il est essentiel.
2. Démontrer à l'aide de l'exercice 4 que R divise le polynôme minimal de A (noté μ_A pour la suite).
3. Démontrer les équivalences suivantes : "A diagonalisable" $\Leftrightarrow$ "$\mu_A = R$" $\Leftrightarrow$ "$R(A) = 0$".
4. Démontrer l'implication suivante : "$\chi_A = R$" $\Rightarrow$ "A diagonalisable".
5. Indiquer si les matrices suivantes sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Réduction d'endomorphismes
Projection spectrale

Exercice 37 Soit $E = \mathbb{C}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On désigne par j l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer l'image de la base $\mathcal{B}$ par j, j^2, j^3 et j^4.
2. En déduire J^2, J^3 et J^4.
3. Déterminer un polynôme annulateur non nul de J.
4. Montrer que si P est un polynôme annulateur de degré inférieur à 3 alors P est nul.
5. En déduire le polynôme minimal de j.
6. Montrer que J est diagonalisable.
7. Déterminer les valeurs propres de J.

Exercice 38 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice par blocs à cœfficients réels suivante

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}A \\ \frac{1}{2}A & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer B^2 et B^3.
2. En déduire que B est diagonalisable.
3. Déterminer le polynôme caractéristique et minimal de B.

Exercice 39 Soit A la matrice d'ordre 3 suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.
2. En déduire que A n'est pas diagonalisable.

3. On pose $D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A = D' + N'$, que D' est bien diagonalisable, que N' est bien nilpotente et que ce n'est pourtant pas la décomposition de Dunford de A.

4. On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $N = A - D$. Vérifier que $A = D + N$ est bien la décomposition de Dunford de A.

5. Quel est le polynôme minimal de D?

   On se fixe pour la suite un entier naturel n.

6. Donner le reste de la division euclidienne de X^n par μ_D puis calculer de D^n.

7. En appliquant la formule du binôme calculer A^n.

8. Donner le reste de la division euclidienne de X^n par μ_A puis retrouver le calcul précédent de A^n.

Exercice 40 Soit A la matrice d'ordre 3 suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique et montrer que A n'a qu'une seule valeur propre 1.

2. En déduire que A n'est pas diagonalisable.

3. Montrer que si $A = D+N$ est la décomposition de Dunford de A alors $D = I$ et $N = A-I$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n.

Exercice 41 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.
2. En déduire que A est trigonalisable mais qu'elle n'est pas diagonlisable et que son spectre est $\{1, 2\}$.
3. Calculer les espaces propres E_1 et E_2 et les espaces caractéristiques N_1 et N_2 de A.

   Pour la suite on note Π_1 et Π_2 les projecteurs spectraux correspondants. Notons aussi par Q_1 et Q_2 les polynômes

$$Q_1(X) = \frac{\chi_A(X)}{(1-X)^2} \qquad \text{et} \qquad Q_1(X) = \frac{\chi_A(X)}{(2-X)^1}$$

4. Montrer que Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux et déterminer un couple de polynômes (U_1, U_2) tels que

$$U_1 Q_1 + U_2 Q_2 = 1.$$

5. Calculer les matrices de $U_1(f) \circ Q_1(f)$ et de $U_2(f) \circ Q_2(f)$.
6. Vérifier que ce sont bien les projecteurs spectraux Π_1 et Π_2.
7. Calculer les matrices de $d = 1.\Pi_1 + 2.\Pi_2$ et de $n = f - d$.
8. Vérifier que c'est bien la décomposition de Dunford de f.
9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n.

Exercice 42 Reprendre la méthode précédente pour la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

NB On doit retrouver la décomposition de Dunford de l'un des exercices précédents.

Exercice 43 Reprendre la méthode précédente pour la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

NB Les calculs sont longs. La nouvelle difficulté est essentiellement au niveau des polynômes Q_i et U_i.

Système d'équations différentielles linéaires

Dans cette feuille si A est une matrice d'ordre fini alors l'exponentielle de A est par définition

$$exp(A) = \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{n!}A^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n.$$

On admettra que cette série converge et qu'il en est de même pour les séries qui interviendront ci-dessous.

Exercice 44 Soit A la matrice associée dans la base canonique à un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que si λ est une valeur propre de A alors e^λ est une valeur propre de $exp(A)$.
2. Montrer que si A est une matrice diagonale (resp. triangulaire) alors $exp(A)$ est aussi une matrice diagonale (resp. triangulaire).
3. Montrer que si A est une matrice diagonalisable (resp. trigonalisable) alors $exp(A)$ est aussi une matrice diagonalisable (resp. trigonalisable).
4. Montrer que A et $exp(A)$ commutent.
5. Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Quelles sont les valeurs propres de A?
   (b) En déduire que A est $\mathbb{C}$-diagonalisable mais n'est ni diagonalisable ni trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire $exp(A)$.
   (d) Discuter des éventuelles réciproques des questions précédentes.

Exercice 45 : suite de l'exercice 39.
Soit A la matrice d'ordre 3 suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Résoudre le système d'équations différentielles suivant

$$\dot{X} = AX,$$

où X est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ dépendant de la variable temps.

Exercice 46 : suite de l'exercice 40.
Reprendre l'exercice précédent avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$