Math32 : Examen - Session 2

Jeudi 15 juin - Durée 2h00

Questions de cours. (5 points)

1. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton.
2. Démontrer ce théorème lorsque la dimension est 3 et que la matrice considérée est diagonalisable.

Exercice 1 (4 points)
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E

1. Démontrer que f est injective si et seulement si l'image de toute partie libre de E est une partie libre de E.
2. Démontrer que f est surjective si et seulement si l'image de toute partie génératrice de E est une partie génératrice de E.

Exercice 2 (6 points)
On cherche $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\dddot{y}(t) - 3\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 3y(t) = 0,$$

avec $t \in \mathbb{R}$.

1. On pose $X(t) = (y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\dot{X}(t) = AX(t)$ où A est une matrice que l'on précisera.
2. Déterminer le rang de $A - 3I$ et en déduire que 3 est valeur propre.
3. Déterminer les valeurs propres de A sur $\mathbb{C}$ et en déduire que A se diagonalise.
4. Déterminer les projecteurs spectraux (on pourra les écrire comme un polynôme, à préciser, de la matrice A).
5. Calculer e^{tA} avec $t \in \mathbb{R}$, éventuellement sous la forme d'un polynôme de A.
6. En déduire les solutions de l'équation différentielle.

Exercice 3 (7 points)
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Donner les valeurs de a et b pour que la décomposition de Dunford de A soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On pose $a = 5$ et $b = 0$. Calculer A^n pour tout entier n.

3. On pose $a = 0$ et $b = 7$. Montrer que A est diagonalisable et en déduire sa décomposition de Dunford.

4. On pose $a = 5$ et $b = 7$.

   (a) Montrer que A n'est pas diagonalisable.

   (b) Déterminer la décomposition de Dunford de A.